



SULLA VALUTAZIONE ECONOMICA  
DEL PRESTITO IPOTECARIO  
VITALIZIO (PIV)

*Carlo Mottura*

**ISSN 2531-7148**

Working Papers (Dipartimento di Studi Aziendali)

[online]

*Working Paper Numero 2, 2016*

*Collana del Dipartimento di Studi Aziendali*

I Working Paper del Dipartimento di Studi Aziendali svolgono la funzione di divulgare tempestivamente, in forma definitiva o provvisoria, i risultati di ricerche scientifiche originali.

La loro pubblicazione è soggetta all'approvazione del Comitato Scientifico.

Per ciascuna pubblicazione vengono soddisfatti gli obblighi previsti dall'art. 1 del D.L.L. 31 agosto 1945 n. 660 e successive modifiche.

Copie della presente pubblicazione possono essere richieste alla Redazione.

Esemplare fuori commercio ai sensi della Legge 14 aprile 2004 n. 106.

**REDAZIONE**

Dipartimento di Studi Aziendali  
Università degli Studi Roma Tre  
Via Silvio D'Amico, 77  
00145 Roma – Italia  
Email: [ricerca.studiazienali@uniroma3.it](mailto:ricerca.studiazienali@uniroma3.it)

**COMITATO SCIENTIFICO**

Maria Claudia Lucchetti  
Carlo Mottura  
Mauro Paoloni  
Maddalena Rabitti  
Carlo Maria Travaglini

## SUNTO

Si imposta uno schema per la valutazione economica del prestito ipotecario vitalizio (PIV). Il PIV è un prodotto riservato alla “terza età” che consente al proprietario “anziano” di un immobile residenziale di ottenere una liquidità immediata dalla propria casa senza essere tenuto, finché in vita, ad alcun rimborso e mantenendo il diritto di proprietà piena dell’immobile (nuda proprietà e usufrutto). E’ sviluppata un’analisi di profittabilità del PIV dal punto di vista del finanziatore, anche in confronto con la vendita della nuda proprietà che costituisce, almeno in Italia e rispetto all’obiettivo di ricavare dall’immobile una liquidità immediata, l’operazione “concorrente” alla stipula di un PIV.

Parole chiave: prestito vitalizio, garanzie immobiliari, opzione put.

Classificazione J.E.L.: G21, G22.

## ABSTRACT

An economic analysis of the Italian equity release product named “Prestito Ipotecario Vitalizio” (PIV) is developed. The PIV is a “third age” product that allows the “elder” owner of a residential property to get immediate liquidity from his home without being required, as long as he is alive, to refund anything while maintaining the right to the full ownership of his property (bare ownership and usufruct). The PIV profitability is analysed from the lender’s point of view, even compared to the sale of the bare ownership which is, at least in Italy, the PIV competitor.

Keywords: equity release products, reverse mortgage, real estate guarantee, put option.

J.E.L. Classification: G21, G22.

# 1 Il problema

Si considera il problema della valutazione economica di un prestito ipotecario vitalizio (PIV), anche in confronto alla vendita della nuda proprietà che, almeno in Italia, costituisce l'operazione "concorrente" alla stipula di un PIV. L'approfondimento è motivato dall'interesse che, specie in questa fase storica di "difficoltà" per il c.d. *welfare state*, stanno suscitando i prodotti di tipo privatistico a favore della "terza età".

Il PIV è stato istituito in Italia con l'art. 11-quaterdecies della legge n. 248 del 2 dicembre 2005, modificata dalla legge n. 44 del 2 aprile 2015 (che ha aggiunto i commi da 12 bis a 12 sexies alla preesistente legge). Nei mercati internazionali il PIV si inquadra nei prodotti "equity release" e "reverse mortgage" <sup>1</sup>.

In Italia, esistono diversi intermediari – banche e società finanziarie – che offrono prodotti di tipo PIV <sup>2</sup>.

## 2 Descrizione del PIV

### 2.1 Caratteristiche contrattuali

Il PIV è un contratto di prestito che consente a un proprietario "anziano" di un immobile residenziale – ultra sessantenne – di ottenere una liquidità immediata dalla propria casa, senza essere tenuto, finché in vita, ad alcun rimborso e mantenendo il diritto di proprietà piena dell'immobile (nuda proprietà e usufrutto).

Al decesso del mutuatario, gli eredi possono rimborsare il montante finale (il capitale e gli interessi – calcolati in legge esponenziale al tasso di interesse del PIV – oltre alle spese) o decidere di vendere l'immobile. In quest'ultimo caso: (a) se l'immobile è venduto a un valore maggiore del montante finale, gli eredi hanno il diritto di ricevere l'eventuale eccedenza (del valore di vendita rispetto al montante finale); (b) se, invece, il ricavato dalla vendita dell'immobile è minore del montante, gli eredi non sono tenuti a pagare l'eventuale differenza negativa (garanzia immobiliare). In altri termini, il PIV incorpora una garanzia che consente agli eredi di "rimborsare" il prestito a un importo comunque non maggiore del valore dell'immobile a scadenza.

### 2.2 Formalizzazione del contratto

Gli importi monetari generati da un PIV stipulato in  $t = 0$  possono essere descritti considerando le seguenti variabili :

- $x$ , età iniziale del mutuatario;
- $I_0$ , valore iniziale dell'immobile ipotecato;
- $\alpha$ , % finanziata del valore iniziale dell'immobile;

---

<sup>1</sup>Vedi: Pacella C., Filotto U. (2016). Per un'analisi di aspetti tecnici caratteristici di prodotti "equity release" e "reverse mortgage" vedi: Leea Y. T., Wangb C. W., Huangc H. C. (2012); Kima J. H. T., Lib J. S. H. (2016); Shao A. W., Hanewald K., Sherris M. (2015); Tsaya J. T., Linb C. C., Pratherc L. J., Buttimer Jr. R. J. (2014).

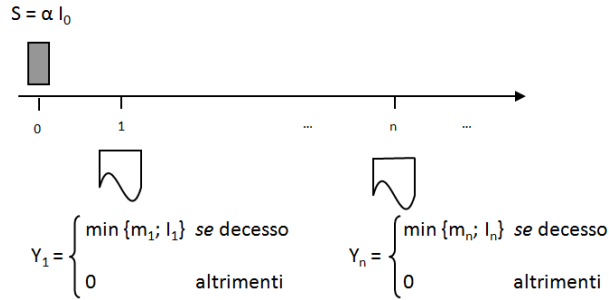
<sup>2</sup>Vedi, ad esempio, il *Foglio Informativo del 14 aprile 2016 del Monte Paschi di Siena* ([www.gruppo.mps.it](http://www.gruppo.mps.it))

- $S = \alpha I_0$ , capitale iniziale finanziato;
- $i$ , tasso di interesse contrattuale del PIV (su base annua);
- $\tilde{s}$ , scadenza del PIV, aleatoria alla stipula ( $\tilde{n} = 1, 2, \dots, n, \dots$ );
- $m_{\tilde{s}} = \alpha I_0(1 + i)^{\tilde{s}}$ , montante finale;
- $I_{\tilde{s}}$ , valore finale dell'immobile ipotecato;
- $Y_{\tilde{s}} = \min\{m_{\tilde{s}}, I_{\tilde{s}}\}$ , pay-off del capitale finale del PIV.

In generale, lo scambio generato dal PIV è affetto da incertezza demografica, finanziaria e immobiliare; la componente demografica del PIV può essere trattata considerando le probabilità di morte differita. Nei prodotti offerti dal mercato, i livelli di  $\alpha$  e  $i$  dipendono dall'età,  $x$ , del mutuatario alla stipula del PIV.

Lo scambio di importi monetari generati da un PIV sullo scadenziario annuo  $(0, 1, \dots, n, \dots)$ , con segni contabili definiti dal punto di vista del mutuatario e dei suoi eredi, è schematizzato nella figura 1.

Figura 1: scambio di importi monetari generati da un PIV (per il mutuatario).



Il pay-off,  $Y_{\tilde{s}}$ , dell'importo generato dal PIV alla scadenza aleatoria  $\tilde{s}$  – al decesso del mutuatario – è espresso dalla:

$$Y_{\tilde{s}} = \min\{m_{\tilde{s}}, I_{\tilde{s}}\}. \quad (1)$$

La (1), nel linguaggio della scomposizione put, può essere espressa dalla:

$$Y_{\tilde{s}} = m_{\tilde{s}} - \max\{m_{\tilde{s}} - I_{\tilde{s}}, 0\}. \quad (2)$$

Di conseguenza, stipulare un PIV è equivalente, per il mutuatario, a stipulare (con il mutuante) un prestito vitalizio senza garanzia immobiliare con capitale a scadenza  $m_{\tilde{s}}$ , e a comprare (dal mutuante) una opzione put scritta sul valore dell'immobile ipotecato, con tempo di esercizio e prezzo di esercizio aleatori; l'opzione put formalizza la garanzia immobiliare incorporata nel PIV a favore degli eredi.

Nel linguaggio della scomposizione call, la (1) può essere espressa dalla:

$$Y_{\tilde{s}} = I_{\tilde{s}} - \max\{I_{\tilde{s}} - m_{\tilde{s}}, 0\} \quad (3)$$

Secondo la scomposizione call, stipulare un PIV equivale per il mutuatario a vendere l'immobile (al mutuante) e a comprare (dal mutuante) una opzione call

scritta sul valore dell'immobile ipotecato, con tempo di esercizio e prezzo di esercizio aleatori; l'opzione call corrisponde al diritto degli eredi di (ri)comprare l'immobile al prezzo  $m_{\bar{s}}$ .

*Osservazione.* In un situazione deterministica, si può ipotizzare la durata aleatoria del PIV uguale a una durata prefissata; e il valore finale dell'immobile ipotecato uguale al montante del suo valore iniziale, ad esempio calcolato a un assegnato "tasso di rivalutazione immobiliare" noto e costante,  $r$ , espresso in anni:  $I_n = I_0(1+r)^n$ . Il pay-off del capitale finale del PIV può essere espresso dalla:

$$Y_n = \min\{m_n, I_n\} = \min\{\alpha I_0(1+i)^n, I_0(1+r)^n\}.$$

■

### 2.3 Il Net Asset Value dell'operazione per il mutuante

Alla stipula del PIV ( $t = 0$ ), il Net Asset Value (NAV) dell'operazione per il mutuante è definito dall'espressione:

$$NAV(0) = V(0, Y_{\bar{s}}) - S = V(0, Y_{\bar{s}}) - \alpha I_0, \quad (4)$$

ossia è uguale alla differenza tra il valore alla stipula della prestazione a scadenza a carico del cliente mutuatario ( $Y_{\bar{s}}$ ) e il capitale iniziale erogato ( $S = \alpha I_0$ ).

Nella valutazione attuariale tradizionale la (4) si può riscrivere nella forma:

$$NAV(0) = \sum_{k=1}^{\omega} V(0, Y_k) {}_{k-1|1}q_x - \alpha I_0 \quad (5)$$

essendo

$$Y_k = \begin{cases} \min(m_k, I_k), & \text{con probabilità } {}_{k-1|1}q_x, \\ 0, & \text{con probabilità } 1 - {}_{k-1|1}q_x. \end{cases} \quad (6)$$

e avendo indicato con  $\omega$  l'età estrema e con  ${}_{k-1|1}q_x$  la probabilità differita di morte (del mutuatarario di età  $x$  alla stipula del PIV).

Nel caso di scomposizione put risulta:

$$\begin{aligned} NAV(0) &= V(0, m_{\bar{s}}) - V(0, \max\{m_{\bar{s}} - I_{\bar{s}}, 0\}) - \alpha I_0 \\ &= \sum_{k=1}^{\omega} (m_k v_k^* - p_k) {}_{k-1|1}q_x - \alpha I_0 \end{aligned} \quad (7)$$

dove:  $m_k = \alpha I_0(1+i)^k$  è il montante calcolato al tasso  $i$  per il periodo da 0 a  $k$ ;  $v_k^* = (1+i^*)^{-k}$  è il fattore di sconto, calcolato al tasso  $i^*$  al quale il mutuante può raccogliere fondi sul mercato per il periodo da 0 a  $k$ ;  $p_k = V(0, \max\{m_k - I_k, 0\})$  è il valore dell'opzione put implicita nella prestazione  $Y_k$ , di tipo europeo, scritta su I, con tempo di esercizio  $k$  e prezzo di esercizio  $m_k$ .

## 3 Casi di valutazione

Sono analizzati casi di valutazione assumendo, nell'espressione (7): (a) che la durata del PIV sia uguale alla vita attesa del mutuatarario alla stipula,  $n$ , calcolata utilizzando tavole di mortalità ISTAT; (b) che il valore della garanzia

immobiliare sia determinato utilizzando il modello standard di Black e Scholes e applicando, al valore ricavato col modello standard, un fattore di penalità esogeno ( $\beta \geq 1$ ), per tener conto – in prima approssimazione – delle specificità del sottostante (valore dell’immobile residenziale, “mercato” immobiliare). Il NAV dell’operazione per il mutuante può essere pertanto riscritto nella:

$$NAV(0) = m_n v_n^* - \beta V(0, \max\{m_n - I_n, 0\}) - \alpha I_0 \quad (8)$$

dove:  $m_n = \alpha I_0 (1 + i)^n$  è il montante, alla scadenza  $n$ , del capitale inizialmente finanziato;  $v_n^* = (1 + i^*)^{-n}$  è il fattore di sconto, calcolato al tasso  $i^*$  per lo stesso periodo;  $V(0, \max\{m_n - I_n, 0\})$  è il valore, alla stipula del PIV, di una put europea, scritta sul valore dell’immobile ipotecato, con prezzo di esercizio  $m_n$  e tempo di esercizio  $n$ <sup>3</sup>.

L’espressione (8) evidenzia che, per il mutuante, il margine di interesse ( $i - i^*$ ) contribuisce a finanziare il valore della put venduta dal mutuante al cliente alla data di stipula.

*Osservazione.* Dal punto di vista della banca-mutuante, la gestione finanziaria di un PIV può essere esemplificata nella seguenti operazioni: emissione di un zero coupon bond di durata  $n$ , tasso di interesse  $i^*$  e valore a scadenza  $m_n$ ; utilizzo del capitale raccolto con l’emissione dello zero coupon bond ( $m_n v_n^*$ ) per erogare il capitale iniziale del PIV al cliente ( $\alpha I_0$ ) e per “acquistare” la put a copertura della garanzia immobiliare venduta al cliente alla stipula del PIV. ■

### 3.1 Analisi del NAV

È stato studiato l’andamento del NAV, espresso dalla (8), al variare del tasso di interesse del PIV,  $i$ , e della % finanziata del valore iniziale dell’immobile ipotecato,  $\alpha$ . In particolare, alla data di valutazione 31 agosto 2016, sono stati considerati:

- un mutuatario maschio di età iniziale uguale a 60 anni, che sia proprietario di un immobile con valore iniziale di 100.000 euro ( $I_0 = 100.000$ ); data l’età iniziale, la durata attesa del PIV calcolata utilizzando le tavole ISTAT 2014 (maschi) è uguale a 23 anni ( $n = 23$ );
- un tasso annuo di raccolta per il mutuante di 1,88% ( $i^* = 0,0188$ );
- ai fini della valutazione dell’opzione put: un tasso annuo risk-free dello 0,77% ( $r^f = 0,0077$ ); un tasso di “dividendo” uguale a zero ( $q = 0$ ); una volatilità annua del sottostante del 10,0% ( $\sigma = 0,1$ ); un fattore di penalità di 1,5 ( $\beta = 1,5$ ).

Per apprezzare il senso numerico dei dati utilizzati si noti che, alla data di valutazione: il tasso  $i^*$  ipotizzato è in linea con il tasso di rendimento, alla data

<sup>3</sup>Nel modello di Black e Scholes risulta:

$$\beta V(0, \max\{m_n - I_n, 0\}) = \beta \left[ m_n e^{-r^f n} N(-d_2) - I(0) e^{-q n} N(-d_1) \right],$$

con:

$$d_1 = \frac{\log[I(0)/m_n] + (r^f - q + \sigma^2/2)\tau}{\sigma \sqrt{n}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{n},$$

essendo  $r^f$  il tasso risk-free,  $\sigma$  il parametro di volatilità,  $q$  il tasso di “dividendo”,  $N(x)$  la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard (data la simmetria della distribuzione normale standard:  $N(-x) = 1 - N(x)$ ). Per approfondimenti: Castellani G., De Felice M., Moriconi F., *Manuale di finanza, III. Modelli stocastici e contratti derivati*, Bologna, Il Mulino, 2006.

di valutazione, di obbligazioni emesse da Intesa San Paolo a medio-lungo termine (fonte Bloomberg); il tasso annuo risk-free corrisponde al tasso a pronti della curva zero coupon swap per la divisa euro ricavata dalla situazione di mercato (fonte Bloomberg); l'ipotesi di volatilità annua appare particolarmente prudente se confrontata con il livello della volatilità annua storica dell'indice ISTAT dei prezzi delle "abitazioni esistenti", che risulta inferiore al 3% (fonte ISTAT). La "superficie" del NAV al variare di  $i$ , dal 2% al 10%, e di  $\alpha$ , dal 20% al 90%, è illustrata nella figura 2.

Nelle figure 3 e 4 sono illustrate due "sezioni" della superficie (della figura 2): la figura 3 riporta l'andamento del NAV – espresso in termini di tasso annuo di profitto (misurato sull'asse verticale a sinistra) <sup>4</sup> – al variare del tasso  $i$  del PIV, per livelli di  $\alpha$  fissati al 20% e al 40%; la figura 4 riporta, invece, l'andamento del NAV al variare di  $\alpha$  tra il 20% e il 90, fissato il parametro  $i$  al 6% <sup>5</sup>. In entrambi i grafici è anche riportato l'andamento del rapporto tra montante a scadenza del PIV e valore iniziale dell'immobile ( $LtV = m_n/I_0$ ; misurato sull'asse verticale a destra).

Fissata la percentuale finanziata  $\alpha$ , il NAV ha un andamento non monotono rispetto al tasso  $i$ , prima crescente e poi decrescente (figura 3); il rapporto  $LtV$  ha un andamento crescente. In particolare, all'aumentare di  $\alpha$ , l'area di profitto per il mutuante si sposta verso il basso. Dall'altra, all'aumentare della percentuale finanziata  $\alpha$ , fissato  $i$  (al 6%), il NAV ha andamento decrescente e il  $LtV$  crescente (figura 4).

Le tabelle 1 e 2 illustrano i valori del NAV al variare di  $i$  dal 2,5% al 6,5% fissato, rispettivamente,  $\alpha = 20\%$  e  $\alpha = 40\%$ . Risulta che: (a) se  $\alpha = 20\%$ , è  $NAV > 0$  e  $LtV \leq 1$  per tutti i livelli di  $i$  nell'intervallo considerato (tabella 1); (b) se  $\alpha = 40\%$ , è  $NAV > 0$  e  $LtV \leq 1$  se  $2,5\% \geq i \leq 4\%$  (tabella 1); (c) se  $\alpha$  aumenta dal 20% al 40%, il punto di massimo profitto per il mutuante, misurato in termini di tasso annuo di profitto, diminuisce dall'1,75% (corrispondente a un livello di  $i$  del 6% circa) allo 0,59% (corrispondente a un livello di  $i$  del 4% circa). Le tabelle 1 e 2 misurano dunque il *trade-off*, in termini di  $i$  e di  $\alpha$ , tra appetibilità del PIV per il potenziale cliente e profittabilità del prodotto per il soggetto mutuante.

La tabella 3 illustra i valori del NAV al variare di  $\alpha$  dal 40% al 75% fissato  $i = 6\%$ . Risulta che, a parità di tasso del PIV, il NAV del prodotto per il mutuante diminuisce.

### 3.2 Un confronto tra PIV e vendita della nuda proprietà

Se l'obiettivo del proprietario dell'immobile è di generare una disponibilità monetaria immediata, l'alternativa alla stipula di un PIV è la vendita della nuda proprietà. Quest'ultima, come noto, è il contratto con il quale il nudo proprietario acquista la titolarità di una casa pagando una parte del valore di stima legata all'età del venditore, mentre usufrutto o diritto di abitazione restano al venditore e alla sua morte passano al nudo proprietario. Il vantaggio per il

<sup>4</sup>Il tasso annuo di profitto, per il mutuante, è definito da:  $[1 + NAV(0)/(m_n v_n^*)]^{1/n} - 1$ .

<sup>5</sup>Si tratta di livelli dei parametri  $\alpha$  e  $i$  che si ritrovano in alcuni prospetti di mercato. Ad esempio, il prodotto "Prestisenior" offerto dalla banca Monte dei Paschi di Siena prevede, per un soggetto mutuuario di 60 anni, una percentuale  $\alpha$  inferiore al 20% e un TAEG (per un cliente di 70 anni di età alla stipula) del 6% circa.



venditore dell'immobile è di avere un'entrata immediata, conservando al tempo stesso il diritto di usufrutto (e di abitare la propria casa fino alla morte). Nel caso di stipula di un PIV, invece, il mutuatario – e gli eredi – mantengono la proprietà piena (nuda proprietà e usufrutto) dell'immobile ipotecato.

Nella tabella 4, per età e sesso del mutuatario-proprietario dell'immobile, sono riportate le percentuali di nuda proprietà e usufrutto come stabilite dai coefficienti ministeriali per l'anno 2014; e la vita attesa calcolata sulla base delle tavole ISTAT (maschi/femmine) riferite all'anno 2014.

Il confronto tra la stipula di un PIV e la vendita della nuda proprietà è riportato nella tabella 5. Risulta che, a parità di liquidità immediata per il mutuatario – se  $\alpha$  è posto uguale alla % della nuda proprietà corrispondente all'età iniziale del mutuatario – esistono livelli di  $i$  in grado di generare una profittabilità positiva per il mutuante ( $NAV > 0$ ) per clienti maschi che abbiano tra 60 e 75 anni di età iniziale. In particolare, se la quota dell'immobile finanziata è uguale alla % della nuda proprietà un PIV concesso a un soggetto ottantenne non risulta mai profittevole; e, “ordinando” per profittabilità, il PIV concesso a un soggetto maschio di età iniziale 75 anni (con vita attesa ISTAT di  $n = 12$  anni) domina quello concesso a un soggetto settantenne (con vita attesa ISTAT di  $n = 15$  anni).

Figura 2: “superficie” del NAV, per valori di  $i$  dal 2% al 10%, e di  $\alpha$  dal 20% al 90%).

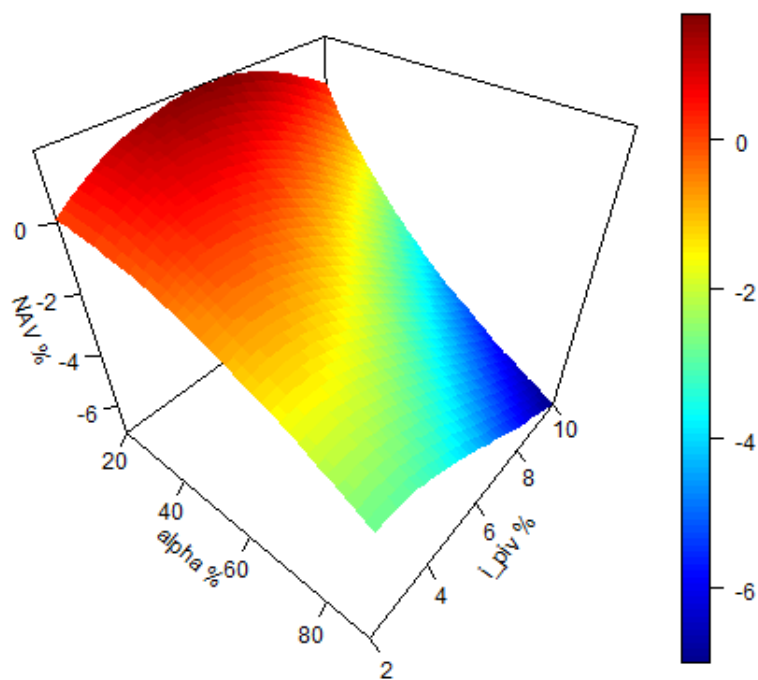


Figura 3: andamento del NAV al variare di  $i$  se  $\alpha=20\%$  o  $\alpha=40\%$  (dati:  $n = 23$ ;  $i^* = 1,88\%$ ;  $\sigma = 10,0\%$ ;  $\beta = 1,5$ ).

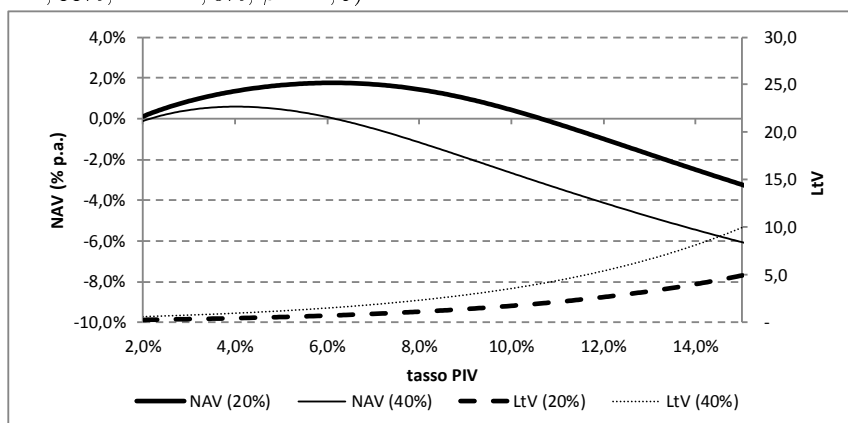


Figura 4: andamento del NAV al variare di  $\alpha$  se  $i = 6\%$  (dati:  $n = 23$ ;  $i^* = 1,88\%$ ;  $\sigma = 10,0\%$ ;  $\beta = 1,5$ )

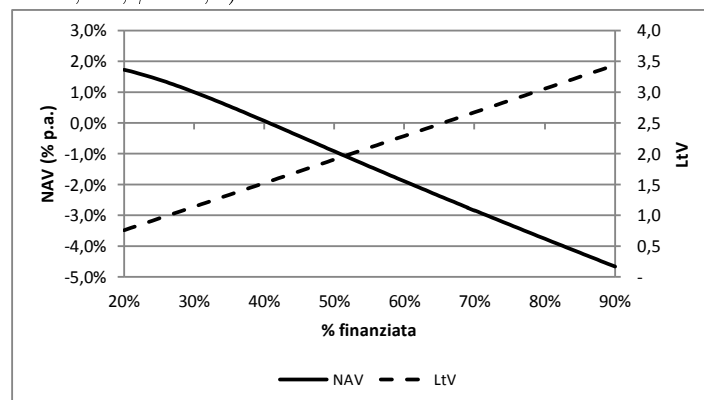


Tabella 1: Valori del NAV al variare di  $i$  (dal 2,5% all'6,5%) se  $\alpha=20\%$  (dati:  $n = 23$ ;  $i^* = 1,88\%$ ;  $\sigma = 10,0\%$ ;  $\beta = 1,5$ )

$\alpha$ %	$i$ % p.a.	$S$ euro	$m_n$ euro	NAV euro	NAV % p.a.	LtV
20,000	2,500	20.000	35.300	2.912	0,52	0,35
20,000	2,600	20.000	36.101	3.422	0,59	0,36
20,000	2,700	20.000	36.919	3.942	0,66	0,37
20,000	2,800	20.000	37.755	4.471	0,73	0,38
20,000	2,900	20.000	38.610	5.009	0,79	0,39
20,000	3,000	20.000	39.482	5.557	0,85	0,39
20,000	3,100	20.000	40.374	6.114	0,91	0,40
20,000	3,200	20.000	41.284	6.681	0,97	0,41
20,000	3,300	20.000	42.215	7.256	1,02	0,42
20,000	3,400	20.000	43.165	7.841	1,08	0,43
20,000	3,500	20.000	44.136	8.434	1,12	0,44
20,000	3,600	20.000	45.128	9.036	1,17	0,45
20,000	3,700	20.000	46.141	9.646	1,22	0,46
20,000	3,800	20.000	47.175	10.263	1,26	0,47
20,000	3,900	20.000	48.232	10.888	1,30	0,48
20,000	4,000	20.000	49.312	11.520	1,34	0,49
20,000	4,100	20.000	50.414	12.158	1,38	0,50
20,000	4,200	20.000	51.540	12.803	1,41	0,52
20,000	4,300	20.000	52.691	13.452	1,45	0,53
20,000	4,400	20.000	53.865	14.106	1,48	0,54
20,000	4,500	20.000	55.065	14.764	1,51	0,55
20,000	4,600	20.000	56.290	15.425	1,54	0,56
20,000	4,700	20.000	57.542	16.088	1,56	0,58
20,000	4,800	20.000	58.820	16.752	1,59	0,59
20,000	4,900	20.000	60.125	17.416	1,61	0,60
20,000	5,000	20.000	61.457	18.079	1,63	0,61
20,000	5,100	20.000	62.818	18.740	1,65	0,63
20,000	5,200	20.000	64.208	19.397	1,67	0,64
20,000	5,300	20.000	65.627	20.050	1,69	0,66
20,000	5,400	20.000	67.076	20.696	1,70	0,67
20,000	5,500	20.000	68.556	21.335	1,71	0,69
20,000	5,600	20.000	70.067	21.964	1,72	0,70
20,000	5,700	20.000	71.610	22.583	1,73	0,72
20,000	5,800	20.000	73.185	23.189	1,74	0,73
20,000	5,900	20.000	74.793	23.781	1,74	0,75
20,000	6,000	20.000	76.435	24.357	1,75	0,76
20,000	6,100	20.000	78.112	24.914	1,75	0,78
20,000	6,200	20.000	79.823	25.452	1,75	0,80
20,000	6,300	20.000	81.571	25.968	1,75	0,82
20,000	6,400	20.000	83.355	26.460	1,74	0,83
20,000	6,500	20.000	85.176	26.926	1,74	0,85

Tabella 2: Valori del NAV al variare di  $i$  (dal 2,5% all'6,5%) se  $\alpha=40\%$  (dati:  $n = 23$ ;  $i^* = 1,88\%$ ;  $\sigma = 10,0\%$ ;  $\beta = 1,5$ )

$\alpha$ %	$i$ % p.a.	$S$ euro	$m_n$ euro	NAV euro	NAV % p.a.	LtV
40,000	2,500	40.000	70.600	2.181	0,20	0,71
40,000	2,600	40.000	72.202	2.814	0,25	0,72
40,000	2,700	40.000	73.839	3.433	0,30	0,74
40,000	2,800	40.000	75.511	4.036	0,34	0,76
40,000	2,900	40.000	77.219	4.621	0,38	0,77
40,000	3,000	40.000	78.964	5.186	0,42	0,79
40,000	3,100	40.000	80.747	5.729	0,45	0,81
40,000	3,200	40.000	82.569	6.248	0,48	0,83
40,000	3,300	40.000	84.430	6.740	0,50	0,84
40,000	3,400	40.000	86.330	7.203	0,53	0,86
40,000	3,500	40.000	88.272	7.635	0,54	0,88
40,000	3,600	40.000	90.255	8.033	0,56	0,90
40,000	3,700	40.000	92.281	8.396	0,57	0,92
40,000	3,800	40.000	94.351	8.720	0,58	0,94
40,000	3,900	40.000	96.464	9.004	0,58	0,96
40,000	4,000	40.000	98.623	9.245	0,59	0,99
40,000	4,100	40.000	100.829	9.441	0,59	1,01
40,000	4,200	40.000	103.081	9.589	0,58	1,03
40,000	4,300	40.000	105.381	9.687	0,58	1,05
40,000	4,400	40.000	107.731	9.733	0,57	1,08
40,000	4,500	40.000	110.130	9.725	0,55	1,10
40,000	4,600	40.000	112.581	9.660	0,54	1,13
40,000	4,700	40.000	115.084	9.537	0,52	1,15
40,000	4,800	40.000	117.639	9.353	0,50	1,18
40,000	4,900	40.000	120.249	9.107	0,48	1,20
40,000	5,000	40.000	122.915	8.796	0,45	1,23
40,000	5,100	40.000	125.637	8.419	0,43	1,26
40,000	5,200	40.000	128.416	7.975	0,40	1,28
40,000	5,300	40.000	131.255	7.461	0,36	1,31
40,000	5,400	40.000	134.153	6.875	0,33	1,34
40,000	5,500	40.000	137.112	6.218	0,29	1,37
40,000	5,600	40.000	140.134	5.487	0,25	1,40
40,000	5,700	40.000	143.219	4.680	0,21	1,43
40,000	5,800	40.000	146.370	3.798	0,17	1,46
40,000	5,900	40.000	149.586	2.838	0,12	1,50
40,000	6,000	40.000	152.870	1.801	0,08	1,53
40,000	6,100	40.000	156.223	685	0,03	1,56
40,000	6,200	40.000	159.646	-512	-0,02	1,60
40,000	6,300	40.000	163.141	-1.788	-0,07	1,63
40,000	6,400	40.000	166.709	-3.145	-0,13	1,67
40,000	6,500	40.000	170.352	-4.584	-0,18	1,70

Tabella 3: Valori del NAV al variare di  $\alpha$  (dal 40% al 75%) se  $i=6\%$  (dati:  $n = 23$ ;  $i^* = 1,88\%$ ;  $\sigma = 10,0\%$ ;  $\beta = 1,5$ )

$\alpha$ %	$i$ % p.a.	$S$ euro	$m_n$ euro	$NAV$ euro	$NAV$ % p.a.	LtV
40	6,00	40.000	152.870	1.801	0,08	1,53
41	6,00	41.000	156.692	-476	-0,02	1,57
42	6,00	42.000	160.514	-2.823	-0,12	1,61
43	6,00	43.000	164.335	-5.236	-0,22	1,64
44	6,00	44.000	168.157	-7.711	-0,32	1,68
45	6,00	45.000	171.979	-10.243	-0,42	1,72
46	6,00	46.000	175.801	-12.829	-0,52	1,76
47	6,00	47.000	179.622	-15.465	-0,61	1,80
48	6,00	48.000	183.444	-18.148	-0,71	1,83
49	6,00	49.000	187.266	-20.875	-0,81	1,87
50	6,00	50.000	191.088	-23.642	-0,91	1,91
51	6,00	51.000	194.909	-26.447	-1,01	1,95
52	6,00	52.000	198.731	-29.287	-1,11	1,99
53	6,00	53.000	202.553	-32.161	-1,21	2,03
54	6,00	54.000	206.375	-35.064	-1,31	2,06
55	6,00	55.000	210.196	-37.997	-1,40	2,10
56	6,00	56.000	214.018	-40.955	-1,50	2,14
57	6,00	57.000	217.840	-43.939	-1,60	2,18
58	6,00	58.000	221.662	-46.945	-1,70	2,22
59	6,00	59.000	225.483	-49.973	-1,79	2,25
60	6,00	60.000	229.305	-53.020	-1,89	2,29
61	6,00	61.000	233.127	-56.086	-1,99	2,33
62	6,00	62.000	236.949	-59.169	-2,08	2,37
63	6,00	63.000	240.770	-62.268	-2,18	2,41
64	6,00	64.000	244.592	-65.382	-2,27	2,45
65	6,00	65.000	248.414	-68.510	-2,37	2,48
66	6,00	66.000	252.236	-71.650	-2,46	2,52
67	6,00	67.000	256.057	-74.803	-2,56	2,56
68	6,00	68.000	259.879	-77.966	-2,65	2,60
69	6,00	69.000	263.701	-81.140	-2,74	2,64
70	6,00	70.000	267.523	-84.324	-2,84	2,68
71	6,00	71.000	271.344	-87.517	-2,93	2,71
72	6,00	72.000	275.166	-90.718	-3,02	2,75
73	6,00	73.000	278.988	-93.927	-3,11	2,79
74	6,00	74.000	282.810	-97.143	-3,21	2,83
75	6,00	75.000	286.632	-100.365	-3,30	2,87

Tabella 4: Coefficienti ministeriali per l'anno 2014 relativi a nuda proprietà e usufrutto, e vita attesa (ISTAT 2014), per età e sesso del mutuatario

sesto M/F	età anni	nuda proprietà %	usufrutto %	vita attesa anni
M	60	40	60	23,01
M	65	50	50	18,91
M	70	60	40	15,06
M	75	65	35	11,56
M	80	75	25	8,42
M	85	80	20	5,90
M	90	85	15	4,05
F	60	40	60	26,75
F	65	50	50	22,31
F	70	60	40	18,03
F	75	65	35	13,99
F	80	75	25	10,28
F	85	80	20	7,18
F	90	85	15	4,85

Tabella 5: Confronto tra stipula di un PIV e vendita della nuda proprietà: i valori del NAV del PIV sono ricavati al variare di  $n$ ,  $\alpha$  e  $i$ , avendo posto  $\alpha$  uguale alla % della nuda proprietà corrispondente all'età iniziale del mutuatario e  $n$  uguale alla vita attesa del mutuatario alla stipula del PIV (dati:  $i^* = 1,88\%$ ;  $\sigma = 10,0\%$ ;  $\beta = 1,5$ )

$n$ anni	$\alpha$ %	$i$ % p.a.	$S$ euro	$m_n$ euro	$NAV$ euro	$NAV$ % p.a.	LtV
23	40	2,50	40.000	70.600	2.181	0,20	0,71
23	40	3,00	40.000	78.964	5.186	0,42	0,79
23	40	3,50	40.000	88.272	7.635	0,54	0,88
23	40	4,00	40.000	98.623	9.245	0,59	0,99
23	40	4,50	40.000	110.130	9.725	0,55	1,10
23	40	5,00	40.000	122.915	8.796	0,45	1,23
23	40	5,50	40.000	137.112	6.218	0,29	1,37
23	40	6,00	40.000	152.870	1.801	0,08	1,53
23	40	6,50	40.000	170.352	-4.584	-0,18	1,70
19	50	2,50	50.000	79.747	311	0,03	0,80
19	50	3,00	50.000	87.432	2.669	0,22	0,87
19	50	3,50	50.000	95.815	4.391	0,33	0,96
19	50	4,00	50.000	104.955	5.289	0,36	1,05
19	50	4,50	50.000	114.917	5.184	0,33	1,15
19	50	5,00	50.000	125.769	3.924	0,23	1,26
19	50	5,50	50.000	137.588	1.391	0,08	1,38
19	50	6,00	50.000	150.454	-2.492	-0,13	1,50
19	50	6,50	50.000	164.453	-7.766	-0,36	1,64
15	60	2,00	60.000	80.848	-4.000	-0,44	0,81
15	60	2,50	60.000	87.027	-1.870	-0,19	0,87
15	60	3,00	60.000	93.644	-216	-0,02	0,94
15	60	3,50	60.000	100.729	846	0,07	1,01
15	60	4,00	60.000	108.311	1.210	0,10	1,08
15	60	4,50	60.000	116.424	787	0,06	1,16
15	60	5,00	60.000	125.101	-490	-0,03	1,25
15	60	5,50	60.000	134.380	-2.665	-0,17	1,34
15	60	6,00	60.000	144.297	-5.759	-0,35	1,44
15	60	6,50	60.000	154.895	-9.770	-0,57	1,55



$n$ anni	$\alpha$ %	$i$ % p.a.	$S$ euro	$m_n$ euro	$NAV$ euro	$NAV$ % p.a.	LtV	
12	65	2,50	65.000	86.469	-423	-0,05	0,86	
12	65	3,00	65.000	91.472	1.095	0,12	0,91	
12	65	3,50	65.000	96.737	2.212	0,23	0,97	
12	65	4,00	65.000	102.279	2.871	0,28	1,02	
12	65	4,50	65.000	108.108	3.024	0,28	1,08	
12	65	5,00	65.000	114.240	2.636	0,23	1,14	
12	65	5,50	65.000	120.688	1.684	0,14	1,21	
(continua)	12	65	6,00	127.467	158	0,01	1,27	
	12	65	6,50	134.592	-1.939	-0,15	1,35	
	8	75	2,50	75.000	92.321	-2.057	-0,30	0,92
	8	75	3,00	75.000	96.180	-1.181	-0,16	0,96
	8	75	3,50	75.000	100.181	-606	-0,08	1,00
	8	75	4,00	75.000	104.327	-350	-0,04	1,04
	8	75	4,50	75.000	108.624	-428	-0,05	1,09
	8	75	5,00	75.000	113.076	-847	-0,10	1,13
	8	75	5,50	75.000	117.688	-1.609	-0,18	1,18
	8	75	6,00	75.000	122.464	-2.710	-0,29	1,22
	8	75	6,50	75.000	127.411	-4.139	-0,43	1,27

## Bibliografia

Castellani G., De Felice M., Moriconi F. (2006), *Manuale di finanza, III. Modelli stocastici e contratti derivati*, Il Mulino.

Leea Y. T., Wangb C. W., Huangc H. C. (2012), *On the valuation of reverse mortgages with regular tenure payments*, Insurance: Mathematics and Economics, vol. 51, Issue 2.

Kima J. H. T., Lib J. S. H. (2016), *Risk-Neutral Valuation of the Non-Recourse Protection in Reverse Mortgages: A Case Study for Korea*, Emerging Markets Review.

Monte dei Paschi di Siena (2016), *Foglio Informativo del 14 aprile 2016 del Monte Paschi di Siena* ([www.gruppo.mps.it](http://www.gruppo.mps.it)).

Pacella C., Filotto U. (2016), *Il prestito vitalizio*, Gruppo 24Ore.

Shao A. W., Hanewald K., Sherris M. (2015), *Reverse mortgage pricing and risk analysis allowing for idiosyncratic house price risk and longevity risk*, Insurance: Mathematics and Economics, vol. 63.

Tsaya J. T., Linb C. C., Pratherc L. J., Buttimer Jr. R. J. (2014), *An approximation approach for valuing reverse mortgages*, Journal of Housing Economics, vol. 25.